Výsledky z 3. domácí úlohy

20.10.2011

.

H1

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{1-n} = -1$. Pro $\varepsilon \in R, \varepsilon > 0$ zvolím $n_0 := [\frac{2}{\varepsilon}] + 2$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ $|\frac{1+n}{1-n} + 1| < \varepsilon$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\log n} = 0$. Pro $\varepsilon \in R, \varepsilon > 0$ vol $n_0 := [e^{2/\varepsilon}] + 1$.

H2 Naprosto důsledný výpočet vypadá u a) například takto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n+2}{(n-1)^3 - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n+2}{-3n^2+3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{-3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}} \overset{VOAL}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}(4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(-3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})} =$$

$$\overset{VOAL}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} 4 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} -3 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} \overset{VOAL}{=} \frac{4 + 0 + \lim_{n\to\infty} 2 \cdot (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n})^2}{-3 + \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n})^2} =$$

$$\overset{VOAL}{=} \frac{4 + 2\cdot 0 \cdot 0}{-3 + 3\cdot 0 - 0^2} = -\frac{4}{3},$$

přičemž věta o aritmetice limit dává označené rovnosti, protože vždy existují limity na pravé straně rovnosti a jejich součty, rozdíly, součiny a podíly jsou definované.
Příklad b) obdobně, jen s výsledkem rovným 1.

H3
a) Užitím vzorce pro součet z prvního cvičení dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+...+n+...+n^2}{(2n+3)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n^2+1)}{2(2n+3)^4},$$

odkud již snadno (za použití VOAL) plyne výsledek $\frac{1}{32}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+4^n}{8^n+3} = 0$. Nejprve policajti:

$$0 \leq \frac{n+4^n}{8^n+3} \leq \frac{n+4^n}{8^n} = \frac{1}{2^n} \cdot (\frac{n}{4^n} + 1), \qquad n \in \mathbb{N},$$

dále $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ (viz cvičení) a další policajti

$$0 \leq \frac{n}{4^n} \leq \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n^2 \leq 4^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Nerovnost platí, neboť je $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$: $n^2 \leq 2^n \leq 4^n$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4^n} = 0$ a VOAL nám dává $\lim_{n\to\infty} \frac{n+4^n}{8^n} = 0$, z čehož výsledek plyne.

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n + n^{3n}} = 0$. Jelikož pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ je $2n \leq n^2$ a $n! \leq n^n$, užijeme policajtů

$$0 \leq \frac{(2n)!}{(2n)^n + n^{3n}} \leq \frac{(2n)!}{n^{3n}} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)...(n+1)n!}{(n^2)^n \cdot n^n} \leq \frac{(2n)^n \cdot n!}{(n^2)^n \cdot n^n} \leq \frac{2}{n},\quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$